TITLE:

複素半古典論とトンネル現象(基研研究会「統計物理の展望」,研究会報告)

AUTHOR(S):

首藤, 啓

CITATION:

首藤, 啓. 複素半古典論とトンネル現象(基研研究会「統計物理の展望」,研究会報告). 物性研究 1999, 71(4): 581-591

ISSUE DATE:

1999-01-20

URL:

http://hdl.handle.net/2433/96551

RIGHT:

京都大学学術情報リポジトリ KURENAI 紅 Kyoto University Research Information Repository

複素半古典論とトンネル現象

首藤 啓
東京都立大学理学研究科
shudo@phys.metro-u.ac.jp

1．多自由度系の量子現象

例えば以下のようなポテンシャルをもつ孤立２自由度系を考えてみよう。

$$H(p_x, p_y, x, y) = \frac{p_x^2}{2} + \frac{p_y^2}{2} + V(x, y), \tag{1}$$

ただし

$$V(x, y) = (x^2 - 1)^2 + y^2 + \lambda x^2 y^2.$$

ポテンシャル $V(x,y)$ は、x 方向に２重井戸型、y方向に調和振動子ポテンシャルをもつ２つの自由度が結合した最も“単純な” ２重井戸ポテンシャルである。孤立系であるから、熱浴や外場といった他の自由度とはまったく結合しておらず、量子系の固有状態を求めることは解析的には実行できないものの、数値的な意味では計算可能である。固有状態が求まれば、例えば、時刻０に片側の井戸の底にいた量子波束が他方の井戸に遷移する確率を計算することは簡単な演習問題のひとつに過ぎない。

さて、片側の井戸にいた初期状態のエネルギーがもし２重井戸の障壁より低ければその遷移はトンネル効果によって起こるが、そこで起こるトンネル現象はどのようなものであろうか？ ポテンシャル $V(x,y)$ が x 方向にのみ２つの井戸をつくっていることからトンネルに直接関与する自由度はとりあえず x 方向だけだと思うことにする。そうするとトンネリングに関しては単なる１次元の２重井戸ポテンシャル問題となる。１次元のトンネル現象は量子力学のどの教科書にも最初に登場し、障壁を通過する平面波などを例題にトンネル現象のイメージをつかむことになっている。この場合、１次元の問題として考えると、遷移確率（あるいは波動関数のテイル部分）は、ポテンシャル障壁にぶつかったところから指数関数的に単調に減衰しながら反対側の井戸に滲み出る、といったことになる。

純粋に量子現象であるトンネル効果を古典論のイメージで捉えるにはインスタントンが有効である。インスタントンは、時間を虚方向に動かすことによってちょうど逆さになったポテンシャルを転げ落ちる粒子のことである。孤立系でなく環境と結合しているときの遷移確率、あるいは準安定状態の寿命を計算する際にもインスタントンの手法が威力を発揮することはもはや周知であろう [1]。もし (1) の系を、トンネルする自由度（x 方向）とそれと結合する振動の自由度（y方向）とに分離することが許されるとすると、もしくは完全に分離されないまでもせいぜい摂動として扱うことができる程度だとすれば、(1) のような２重井戸中のトンネリング問題も１次元の描像でほぼ汲み尽くせることになり、我々の“トンネル観”が揺らぐことはない。

しかし明らかに、ここで言ったトンネル現象に対する自由度の分離可能性の前提は疑わしい。その根拠は同じハミルトニアンをもつ古典力学である。系 (1) では、２つの自由度を結合させる結合定数λが０でない限り系は非可積分となる。非可積分系とはいかなる変換に

よっても変数を分離することのできない系のことであり、その古典ダイナミクスには一般にはカオスが現れる。いまの場合、ポテンシャル $V(x,y)$ の鞍点 $(x,y)=(0,0)$ は古典位相空間上の不安定周期点（不動点）に対応し、その近傍で安定多様体・不安定多様体が交差しカオスが発生する。

トンネルする自由度とそれと結合する他の自由度が分離不可能な、従って対応する古典論ではカオスが発生する非可積分系のトンネル現象は、1次元あるいは分離可能な多次元系とそもそも何が違うのか？

2. 複素トンネル経路

ここでは複素古典経路を使って多自由度系のトンネル現象を理解する試みを述べる。トンネル現象は古典粒子が到達不可能な領域への波動効果による遷移であるから、素朴に考えると古典論とは全く相いれない量子論固有の現象である。そのような‘非’古典的な運動を、わざわざ古典論で記述しようとすることじたい不自然に感じられるかもしれない。しかし、既にインスタントンのアイデアにあるように、複素空間を使うことによって“仮想的に”古典粒子を考えトンネル効果を表現することは計算手法として有効であるばかりでなく、“軌道”という我々にとっては馴染みある言葉を介することによって現象がより理解しやすくなる、という利点がある。

また、非可積分系の場合、いまのところ量子論よりも古典論のほうが遥かに理解が進んでいることから、量子論を古典カオスの複雑さと関連させて理解しようとする方向は妥当であろうし、そのための手法も量子カオス研究の中で整備されつつある [2]。

ここではさらにもう一歩踏み込んで、古典力学を複素領域に拡張した**複素古典力学**によって、実際に多自由度トンネリングを記述することが可能なこと示し、それによって逆に、これまで物理の対象としてほとんど意識されることのなかった複素古典力学が、実は、量子トンネル現象を通して、現実に観測され得る物理的実在であることを実証しようという目論見もある [3]。

多自由度のトンネリングを複素古典経路を用いて解析する、と言っても、知りたい物理量とモデルによって取り扱いも違ってくる。(1) のような2重井戸系は、2自由度系のトンネリングを見るには最も自然、かつミニマルなモデルで、実際の物理現象との対応関係を付けるのにも適しているように思える。が、実は古典経路を用いた複素半古典論では、一見単純そうに見える (1) のモデルでも、ひとたび複素の世界に入るとたいへん込み入った状況が待っている。その主な理由は、古典系が非可積分であることに由来する数多くの複素経路のトポロジーと、複素時間面上の特異点の性質とが絡み合うことによる [4]。

それらを回避するひとつの手段は散乱問題を考えることである。散乱問題では、対応する古典ダイナミクスの引き伸ばし折れ畳みの一過的であることからダイナミクスのもつ複雑さが軽減され何とか取り扱いが可能になる（それでもまだまだ大変だが [4] ⋯）。散乱問題に複素半古典論を適用するためには散乱問題の定式化自身を書き直す必要も出てくる [4]。

もうひとつの方法は、時間連続な系をとりあえず諦めて離散的なダイナミクスでトンネリングの問題にアプローチすることである。時間を離散的にすることによって現実系との対応が薄れるが、その見返りとして (i) ダイナミクスの特異性を保持しつつ、(ii) 計算が容易になる、(iii) 複素古典経路の性質が複素解析写像の問題に帰着される、といった離散系特有の利点を享受することができる。

高次元のトンネル現象に関与する複素トンネル経路については、これまでにも系の状況に

応じて適当に（ある程度恣意的に）複素パスを選んできては適宜計算、解釈を与える試みはあったが、**寄与する複素経路の全貌**を調べるにはやはりモデルが複雑すぎるように思う (実際は調べてみて結果的にわかることであるが)。また、複素半古典論には後で触れるように、実行途上かなり深刻な困難があるという意味で方法自体のなかに未解決部分を含んでいる。そのため、せいぜい手の届く作業として、発見的に探し出した複素経路をハイブリッド式に導出した定式化に入れる、ということについなりがちである。思いきって余計なものは削ぎ落とし（それによって失われるものもあるかもしれないが)、まずは動かない土台を作ることが高次元のトンネリング理論建設には是非とも必要であろう。

ここでは以下の激力回転子（Kicked Rotor) 系と呼ばれる離散時間系に沿って話しを進める [5]:

$$H = H_0(p) + V(\theta)\sum_n \delta(t-n) \tag{2}$$

この系は運動量項 $H_0(p)$、ポテンシャル $V(\theta)$ を適当に案配することにより、トンネリングを調べるのに適した状況を自由に設計することができる。

系の古典ダイナミクスは、激力が加わる前後の p とθだけをモニターすれば十分であるから時間発展は離散写像で表される。対応する量子論は以下のような時間発展に関するプロパゲータをもって時間推進を与える。ここでは運動量表示で状態を表すことにすると：

$$< p_n|U^n|p_0 >= \int\cdots\int\prod_j d\theta_j\prod_j dp_j \exp\Big[-\frac{i}{\hbar}S(\{\theta_j\},\{p_j\})\Big]. \tag{3}$$

ここで $S(\{\theta_j\},\{p_j\})$ は作用汎関数で

$$S(\{\theta_j\},\{p_j\}) = \sum_{j=1}^{n}\Big[H_0(p_j) + V(\theta_j)) + \theta_j(p_j - p_{j-1})\Big], \tag{4}$$

で与えられる。

このモデルにおいて、量子トンネル現象とは以下のようなものと考える。時刻 0 に勝手な初期状態に古典粒子を置く（いまの場合、量子プロパゲータを運動量表示に取ったのでそれに合わせて例えば $p=$ 一定を初期条件に選ぶ)。時間発展に従って古典軌道（あるいはその集団）は、位相空間 (p,θ) 内を動くが、もし初期条件が安定領域（KAM トーラス) のなかにあったとするとその軌道は時間がたっても時刻 0 にのっていたトーラスから出ることはできない。また、初期条件がカオスの海に入っているときには時間がたってもトーラスのなかに侵入ことはできずそれぞれの領域は孤立している。また、たとえカオスの海の軌道でも有限時間内で到達できる位相空間の領域は限られている。

しかし量子力学ではトンネル効果によってこれら孤立した領域が結ばれる可能性がある。このように動力学的に形成された孤立グループ間の遷移は**動的トンネリング**と呼ばれることがある [6]。エネルギーも動力学的な保存量であることを考えると、通常のエネルギー障壁を越えるトンネリングも、広い意味では動的トンネリングと見なすことができる。

動的トンネリングを理解するために複素経路を持ち込むには、(3) の量子プロパゲータの半古典近似を実行すればよい。ここでいう半古典近似とは (3) の多重積分を鞍点近似で置き換えることである（多重積分の鞍点法は厳密な基礎づけはまだなされていないがそれは気に

しない)。鞍点条件は作用汎関数が極値を取る条件で与えられ、得られる多次元空間の各点は当然のことながら古典論の時間発展方程式に従って得られた古典軌道を表す。得られたプロパゲータの半古典表示は

$$U^{sc}(p_n, p_0) = \sum_k A_k(p_n, p_0) \exp\{-\frac{i}{\hbar} S_k(p_n, p_0) - i\mu_k \frac{\pi}{2}\}. \tag{5}$$

のようになる。ここで、$A_k(p_n, p_0)$ は各古典軌道の周りの量子揺らぎからくる振幅因子、$S_k(p_n, p_0)$ は各軌道の履歴を作用汎関数に代入した古典作用、μ_kは古典軌道のまわりのねじれを表す位相因子である。右辺は、初期に p_0にいた古典軌道が n ステップ後に p_nにいるようなすべての古典軌道 k対して重ね合わされる。(各軌道は p_0に共役なθ_0の初期値が違うことで異なる軌道を表すことになる。)

ここでもし、初期運動量 p_0と出口の運動量 p_nを結ぶような実古典軌道がすべてのθ_0の領域を探しても存在しない場合どうなるだろうか。これは p_0と p_nは n ステップで通常の古典軌道で結ばれていないことを意味する。しかし、そのような運動量間でも量子論的に遷移確率をもつはずであるから、その遷移は上で述べた意味でのトンネル現象によるものと考えなければならない。ここで複素トンネル経路が登場する。実古典軌道で結ばれていない領域での半古典遷移確率は、やはり与えられた初期運動量 p_0と出口の運動量 p_n (観測量であるから共に実数という制約がつく)のもとでそれらをつなぐ複素経路を求めることによって計算される。具体的には、解析接続された初期条件θ_0(観測量でないことから未定のパラメータである) の平面で境界条件を満足する複素解を探索する。いま、初期条件θ_0の空間で寄与する複素経路を以下の集合で表すことにする。

$$\mathcal{M}_n^\alpha \equiv \{\ \theta_0 = \xi + i\eta \in \mathbf{C} \mid \mathrm{Re}\, p_0 = \alpha,\ \mathrm{Im}\, p_0 = 0,\ \mathrm{Im}\, p_n = 0\ \} \tag{6}$$

この $\mathcal{M}_n^\alpha$が寄与し得る複素経路のすべてである。

3. 複素経路の寄与・非寄与問題

ここまでは定式化の問題であって、別の表示、あるいはエネルギー領域で複素半古典論を考えても (6) 同様、何らかの形で寄与軌道が表現されるはずである。大事なことは、例えば (6) の条件式で与えられているような複素軌道が果たして半古典和に対して同等に寄与の資格があるか?ということである。何故そういうことが問題になるか。まず (6) でそれぞれの複素軌道の寄与の大きさを決めるものは、振幅因子 $A_k(p_t, p_0)$ と古典作用の虚部 $\mathrm{Im}S_k(p_n, p_0)$ である。それらが各複素軌道の間で大きく異なる場合、とくに、古典作用は exp の肩にのっているためその僅かな差が寄与の大小を大きく左右する。その結果、作用の虚部が大きい軌道はそうでないものと比較しその絶対値が指数関数的に小さくなることから寄与としてほとんど無視して良いことになる。振幅因子も寄与の大小に関係してくるが、作用の虚部に比べるとその影響は少ない。事実、いま考えている系 (2) では'頑張れば'(6) の集合全体を見ることができ、各複素軌道 kの絶対値を決めるのが作用の虚部 $\mathrm{Im}S_k(p_n, p_0)$ であることを直接確かめることができる [5]。

こうして、このような非可積分系のトンネル現象を複素経路を用いて理解しようとしたとき浮かび上がってくる、ひとつの重要な問題は、

1. 複素経路の寄与の大小を選別するルールを明らかにせよ.

ということになる。これは単に、おのおの考えている系の複素経路の中で作用の虚部の最も小さい軌道（寄与が最も大きい）を発見的にでも見つけてきて、量子論の遷移確率を再現しさえすればそれで問題は終わり、ということではなく、多自由度系のトンネル現象に共通する、インスタントンに代わりうる新しいトンネル軌道の概念（それがあるかどうかもわからないが）は何かないものか、ということである。

一方、複素半古典論においては通常の実半古典論にはない、もうひとつの寄与・非寄与問題がある。実は、量子論のプロパゲータ (3) を鞍点近似して得られた複素古典経路は必ずしもすべて半古典論プロパゲータ (5) にすべて寄与するわけではない。'おおよそ'その半分、集合 (6) に含まれている約半分の初期値は実は (5) の和に加えてはならない。これは、複素半古典論固有の問題というよりは、積分の鞍点近似、あるいは小さいパラメータをもつ微分方程式から導かれる漸近展開全般に現れる問題で**ストークス現象**と呼ばれる [7, 13]。複素経路を用いた半古典論を実行する際には、このストークス現象をどう処理するか、という問題は避けて通ることはできない。多自由度トンネル現象の理論を作る途上、最大の難所といえるかもしれない。特に、(2) のような簡単な系に限っても、考えなければならないのは多重積分の鞍点法・漸近展開であり、その場合のストークス現象の対処法についていまのところ最終的な解決は得られていない。つまり、複素半古典論に現れるもうひとつの寄与・非寄与問題として、

2. 高次元 (or 多重積分) のストークス現象を処理する方法を見つけよ.

という難題に突き当たる。以後、系 (2) に対して以上 2 つの問題を考えてみる。

3-1. 複素力学系とジュリア集合

量子論の時間推進のプロパゲータ (3) の鞍点解である古典時間発展は以下の離散写像で表される ($H_0(p) = p^2/2$ のとき)。

$$\begin{pmatrix} p_{n+1} \\ \theta_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_n - V'(\theta_n) \\ \theta_n + p_{n+1} \end{pmatrix} \tag{7}$$

時刻 0 と時刻 n の端点での拘束条件 (6) は課されているものの、時間発展自身は$\boldsymbol{C}^2$から$\boldsymbol{C}^2$への保測な複素解析写像に他ならない。

力学変数を複素数にした解析写像は実写像からは予想もつかない多様な振る舞いを示す。複素力学系の研究は、1910 年後半に Julia、Fatou らの先駆的な仕事のあと、しばらくの空白期間をおいて 1970 年代になった再び大きな進展があった。コンピュータの性能が格段に進歩したことによって、Mandelbrot が 2 次多項式の 1 次元複素写像族 $P : z_{n+1} = z_n^2 + c$ のパラメータ c の空間のなかでの Julia 集合の連結性を表す境界が、典型的なフラクタル構造をもつことをデモンストレートした。ここで、1 次元複素写像の Julia 集合とは、写像 Pによって無限遠に飛び去る Fatou 集合:

$$U_P = \{z \in \bar{\mathrm{C}} \mid \|P^n(z)\| \to \infty \ (n \to \infty)\}$$

と、その$\bar{\mathrm{C}}(= \boldsymbol{C} \cup \{\infty\})$ での補集合である充填 Julia 集合：

$$K_P = \bar{\mathrm{C}} \setminus U_P$$

の境界

$$J_P = \partial K_P$$

によって定義される。1980年代中頃、華やかなフラクタル図形の陰に隠れて物理の人間の目には留まらなかった、複素解析写像研究としての大きな進展は、Sullivan が Fatou 集合 (この場合の Fatou 集合は $F = \bar{\mathrm{C}} \setminus J$のこと) のダイナミクスの可能性について、その完全な分類を与えたことだと言われている [8]。その仕事は、その後の複素力学系の発展の大きな契機になっており、それに続いて周期的な安定領域のサイクルの個数に対する精密な評価なども与えられている。

無限遠に飛び去る、もしくは周期的な安定領域上（Sullivan の分類によれば、吸引領域・放物型領域・Siegel 円板・Herman 円環のみ）での軌道の運動が穏やかな振る舞いであるのと対照的に、Julia 集合上の軌道の動きはいわゆる Devaney の意味でカオス的、即ち、(a) 軌道の初期値鋭敏性、(b) 位相的推移性、(c)Julia 集合上での周期軌道の稠密性、といった我々が実の力学系で“カオス”を定義するのと同じ全く性質を満たす。つまり、複素解析写像で軌道がカオス的な振る舞いを示すのは上で定義した Julia 集合上のみであり、それ以外の領域ではたとえ無限遠に急速に飛び去ろうとも軌道の振る舞いは単調である。また、Julia 集合は通常$\bar{\boldsymbol{C}}$面上で美しいフラクタル構造をもつ。

さて、比較的詳しい解析が進んでいる 1 次元複素力学系$\bar{\boldsymbol{C}}\to\bar{\boldsymbol{C}}$に対して、我々が知らなければならないのは (7) で与えられるような$\bar{\boldsymbol{C}}^2\to\bar{\boldsymbol{C}}^2$の 2 次元複素写像である。2 次元写像に関する研究も 1980 年の後半あたりから始まっているが、多くのバリエーソンがあり得る中で、どのような 2 次元写像が最も基本的か、という点に対して明確な指針を与えたのは Friedland-Milnor である [9]。彼らの定理によれば、非自明な多項式自己同型写像はすべて、以下で与えられるエノン写像：

$$\mathcal{H}: \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_n \\ y_n^2 - \delta x_n + c \end{pmatrix} \tag{8}$$

とその組み合わせと共役になる。その結果、2 次元の多項式自己同型に関してはエノン写像を考察すれば十分ということになる。

1 次元で定義された Julia 集合の類似も Hubbard によって [10]、まず無限遠に逃散する点の集合：

$$U^{\pm} \equiv \{z = (x, y) \in \mathbf{C^2} |\ \|\mathcal{H}^{\pm n}(z)\| \to \infty \ \ (n \to \infty)\}$$

充填 Julia 集合に対応するものとして、

$$K^{\pm} \equiv \mathbf{C^2} \setminus U^{\pm}$$

さらに、その境界

$$J^{\pm} \equiv \partial K^{\pm}$$

が定義される。2 次元の多項式自己同型写像では、変換のヤコビアンδが 0 でない限り、その逆写像も存在し、逆写像もまた多項式になるため、正方向の iteration と負方向の iteration が同等に考えられる。その結果、1 次元では正方向の iteration に関して有界にとどまる点として Julia 集合 Jが定義されるが、2 次元では正方向に対する J^+(forward Julia 集合と呼ぶことにする）と負方向に対する J^-(同じく backward Julia 集合) を考える。そして 1 次元の Julia 集合に対応するものは、その共通部分：

$$J \equiv J^+ \cap J^-$$

として定義される [10]。

2次元複素多項式写像に関しては、Hubbard、Bedford-Smillie らによって主にポテンシャル論的方法を用いて1次元写像類似、さらには多次元固有の結果が多く得られているが [11]、1次元写像に比べるとむしろこれから多く発展が期待されるようである。

“複素経路”でトンネル現象をとらえる、というアプローチも数学的には複素領域に力学量を解析接続して‘広い意味で’複素力学系を扱っていることに他ならない。‘広い意味で’という言い方をしたのは、上で紹介した複素力学系では時間は離散的で、力学量だけが複素値を取るものであったが、既に述べたように、微分方程式で時間発展を与える場合には、力学量のみならず時間をも複素にする必要が出てくるからである。そのような、時間をも複素にした複素古典力学と、離散時間の複素力学系とのつながりは筆者の知る限りにおいてまだあまりつけられていないようである。離散時間系で導入された Julia 集合 ‥ といった諸概念がどこまで連続時間系で意味があるのか、現時点では全く不明である。

ところで我々は最初に導入した激力回転子系 (2) と、その古典時間発展 (7) に対して、最初の問題、すなわち、作用の虚部の大きさを選別するルールを、複素力学系の問題のなかでとらえたい。うまいことに、(2) はポテンシャルを3次多項式;$V(\theta) = -\theta^3/3 + a\theta$ としてやると、適当な線形変換を介して (7) の写像はエノン写像 $\mathcal{H}$ に移る。そこでいま以下の集合を準備する：

$$L \equiv \{(\theta_0, p_0) \in \mathbf{C^2} \ \mid \ \mathrm{Im}\, p_n \to 0,\ \mathrm{Im}\, \theta_n \to 0 \ \ (n \to +\infty)\} \tag{9}$$

さらに、上で定義した K^+との共通部分として

$$L^+ \equiv L \cap K^+ \tag{10}$$

を考える。このとき、

定理 (Y. Ishii)
(1) $\mathcal{H}$は双曲的
(2) $\mathcal{H}$の実平面上のトポロジカルエントロピーは正
の2つを仮定すると、

$$closure(L^+) = J^+$$

が成り立つ。

では、$n \to +\infty$ で実面に接近し、かつ実部も有界でとどまり続ける集合 L^+はトンネル経路といかなる関係にあるだろうか。実は上記 (1)(2) の仮定のもとでは、$p_n, \theta_n \in L^+$であれば、$n \to +\infty$ で作用の虚部が絶対収束 ($\mathrm{Im}\, S_n < \infty$) することを示すことができる。つまり、時間と共に実面に接近していく軌道は作用の虚部は $n \to +\infty$ でも有界のままでいることができる。それに対して、作用の虚部が $n \to +\infty$ で発散するような点は、時間が経つにつれて急激に ($\exp\{\exp\cdots\}$ の速さで) 虚部の絶対値を増大させ、有界にとどまる軌道と比較するとその寄与は圧倒的に小さくなるか、さもなければ後で述べるストークス現象によって切り落とされるか、のいずれかの運命をたどる。どちらにしても、トンネル軌道としての寄与は無視できることになる。

つまり、時間無限大でも作用の虚部が絶対収束し有界、ということをトンネル寄与軌道の定義だと思うことにすると（この定義は今の状況では妥当だと思われるが）、上記の定理が主張することは、トンネル軌道は forward Julia 集合 J^+のなかで稠密、ということである。この状況は、(1)(2) の仮定が満たされていない場合、あるいは、エノン写像ではない別の写像系（スタンダード写像など）でも数値的に確認されている。我々が (6) で定義した $\mathcal{M}_n$集合のなかに発見的に見い出した、鎖状構造（Laputa Chain と呼んだ）（詳しくは文献 [5] を参照されたし）の極限は他ならぬ forward Julia 集合 J^+であった。

以上が先に挙げた **1.** の問いに対するひとつの解答である。非可積分系のトンネル現象に特徴的な (1) トンネル確率のクロスオーバー、(2) トンネル領域での多段構造と不規則な干渉、(3) プラトーの形成とトンネル確率の異常な増大、といった 1 次元には現れない多次元系固有の特性は、複素空間の中の Julia 集合がトンネル経路として寄与していることから自然に理解される。この場合、従来のインスタントンに代わる複素経路は Julia 集合だ、ということになる。上で触れた Devaney の意味でのカオスは複素エノン写像の場合にも証明されており [12]、その意味でも**カオス的トンネリング**の正体は **Julia 集合上の複素トンネル経路のカオス的な運動**が背後にあると考えることができる。

3-2. 多重積分のストークス現象

3. の最初に触れたように、量子プロパゲータ (3) の鞍点条件を満たす複素古典解はそのすべてが半古典和 (5) に寄与するわけではなく、ストークス現象によって寄与してはいけない解（無縁根）がある。**3-1.** で見た $n \to \infty$ でトンネル解と見なすべき $\mathrm{Im}\, S_n < \infty$ なる複素経路の中にも無限根がたくさん含まれている。複素半古典論を考える際、このストークス現象の問題は常についてまわる。

ストークス現象は一般にパラメータをもった、複素領域に拡張された微分方程式、もしくはその解の積分表示に対して、独立変数 (or パラメータ) の複素領域上、その漸近形が不連続にジャンプする現象を言う。1 次元のポテンシャル障壁の左右で WKB 解の接続問題を考える際、古典展開点近傍ではポテンシャルを線形で近似し、その解である Airy 関数の漸近形を求めそれぞれを遠方の振動解と減衰解に接続する。このとき、トンネル側にある Airy 関数の漸近解は境界条件から減衰解だけが選ばれることになるが、これは Airy 関数の漸近解が複素領域でストークス現象を起こしていることに他ならない。

ストークス現象は微少パラメータを含む漸近展開に付随して発生するため、実はその正確な意味付けや取り扱いはなかなかややこしい。最初の発見者であるストークス自身も、漸近形の不連続なジャンプが正確にはどこで起こるか、という問題で最後まで頭を悩ましていたという逸話もある。

ストークス現象は、例えば Airy 関数のように 2 つの漸近解がある場合、それらのどちらかが他方をその大きさとして最も凌駕しているとき（そのような複素面上のラインをストークス線という）起こる（指数的最大優越の原理）。しかし、ストークス線上では小さい方の解 (sub-dominant solution) が指数関数的に小さいため、大きい方の解 (dominant solution) の漸近展開の誤差のなかに埋もれてしまいどこで漸近解の形が変わったかを正確に把握することはできない。

こういった困難はすべて、漸近展開自身が本来発散級数であることからくる。しかし近年、古来より総和法のひとつとして知られる Borel 総和法によりこの発散級数に解析的な意味付けを与えることによって、ストークス現象を Borel 面で定義された超関数の基本解どう

しの接続、としてとらえる、いわゆる resurgent 理論 (exact WKB 法とも呼ばれる) が事態を大きく打開した [13]。特に、2階の Fuchs 型微分方程式（特異点がすべて確定特異点、1次元の Schrödinger 方程式などはこの仲間）の解の大域的な情報（モノドロミー）がストークス現象による接続問題と密接に関連していることが示されるなど、具体的な応用にも威力を発揮している [14]。

しかし、物理的な要請が少ないこともあってか、高階（3階以上）の微分方程式をはじめ、多重積分を含む高次元のストークス現象に対してはまだあまり多くのことはわかってはいない。しかし、手がかりが全然ないわけでもない。resurgent 理論の流れとはまったく独立に、Berk *el al* は3階の微分方程式（対応する積分表示は Peacey 関数）では、一般の高階の微分方程式ではストークス線の交差が発生することを指摘した。さらに、交差点問題の現象論的な対処法を提案した [15]。Berk らの議論に対する exact WKB 法からの基礎付けは Aoki, Kawai and Takei らによって試みられている [16]。

我々が問題にする量子プロパゲータ (3) の鞍点近似には多重積分のストークス現象が出てくる。例えば、**3-1.** で出てきたエノン写像の2ステップのプロパゲータは作用を少し書き換えると、

$$u(q_3, q_0) \;=\; \int\!\!\int dq_1 dq_2 \, \exp\Big[\frac{i}{\hbar} S(q_3, q_2, q_1, q_0)\Big] \tag{11}$$

ただし

$$S(q_3, q_2, q_1, q_0) \;=\; \frac{1}{2}(q_3 - q_2)^2 + \frac{1}{2}(q_2 - q_1)^2 + \frac{1}{2}(q_1 - q_0)^2 + cq_2 + \frac{q_2^3}{3} + cq_1 + \frac{q_1^3}{3}$$

のように2重積分になる。紙数の都合上、詳細は省略するが、この場合のストークス現象は、Aoki el.al. らが3階の微分方程式に対して提案した Ansatz の一般化により理解が可能になってきた [19]。具体的には、従来の火点に加えて Aoki *el al* らが導入した新しい火点、並びにストークス線の交差点（(11) の場合は2重交差のみならず、3重交差なども起きるが）などを含む q_3面上、任意の閉ループに対する $u(q_3, q_0)$ の一価性条件を課すことによって、$u(q_3, q_0)$ のボレル像のリーマン面の構造を決定することによって行われる。ボレル像のリーマン面の構造はボレル総和法を用いた exact WKB 法において、ストークス幾何（どのストークス線上でストークス現象が実際におこり、そのストークス線上では起こらないか）を決定する鍵になる情報である。例えば (11) のような有限多重積分であれば、少なくとも原理的には従来のストークス線と新しいストークス線のグラフ論的な考察から一定のアルゴリズムのもとでストークス幾何を決定することができる。しかし、得られたストークス幾何がいつでも一意的であるか（一意的であれば正しいボレル像のリーマン面を表現しているはずだが）、などの数学的に厳密な基礎付けは今後の研究を待たなければならない。現時点では、

1. 漸近領域のストークス現象
2. 勾配方程式を解くことによる多次元積分面の決定 [17]
3. 超漸近展開法を利用したリーマン面の代数的解析 [18]
4. ストークス幾何上の一価性条件を要請したグラフ解析

の4通りの独立な方法で多重積分のストークス現象を処理する新しいアルゴリズムの妥当性が確かめられている [19]。

というわけで、**2.** の問題に対しても有効な手がかりはつかめ始めている（もちろん、一般の高次元のストークス現象の問題の全貌を掌握するにはまだ程遠いが‥）。

4. まとめ

トンネル現象は典型的な量子効果のひとつである。単に与えられた量子系の固有状態や遷移確率を計算するだけであれば簡単な問題であっても、対応する古典論にカオスがあることによってその背後では思いもよらぬ複雑なことが起こる。複素古典軌道を用いて多自由度系の量子現象を"解剖"することは、1自由度系の量子論と多次元系のそれとのの歴然とした差が見せてくれる。ここでは全く触れることのできなかった、現象としての**カオス的トンネリング**の特徴とその発生機構 [5] によって、1次元系で培われた我々のトンネル観は相当な変更を迫られるのではないかと思われる。

量子古典対応という意味では、1次元の Bohr-Sommerfeld の古典量子化条件を、exact WKB 法を介して完全に理解する、という試みは Voros を中心としていまだに延々と続けられているが、もとはと言えば、**3-2** で触れた微分方程式論の最近の break through と言われる resurgent 理論も Balian-Bloch, Voros らにその端を発している [20]。それがカオス系にまで手が届くにはまだどのくらいかかるのか想像もつかないが、量子論と対応させるべき古典論は、正しくは実の古典論ではなく複素古典論であることはもはや疑いようもない。また、ここで見てきたように、トンネル効果という'物理現象'のなかに複素古典力学のリアリティを見い出すこともできるが、量子化条件を与える位相空間のなかの幾何学的な対象としても、複素力学系は今後もっと前面に出てくるべきものではないだろうか。

なお、この報告は池田研介氏 (立命館大理工)、石井豊氏（九大数理）との日頃の議論、共同研究をもとに書かれてたものであることを最後に付記しておく。また、また複素力学系に関してご教示頂いた上田哲生氏 (京都大学) 並びに西村保一郎氏 (大阪医科大学)、さらには xact WKB 法に関して貴重なコメントを頂いた青木貴史氏 (近畿大理工) の諸氏に謝意を表したい。

参考文献

[1] C.G. Callan, Jr., and S. Coleman, Phys. Rev. D **16**(1977)1762; S. Coleman, "The Use of Instantons", in *The Whys of Subnuclear Physics,* edited by A. Zichichi(Plenum, New York, 1979); W.H. Miller, J. Chem. Phys. **62**(1975)1899; A.O. Calderia and A.J. Leggett, Ann. Phys. (NY) **149**(1983)374.

[2] Les Houches Summer School "chaos and quantum physics", Edts., M.-J. Giannoni, A.Voros and Zinn-Justin, (North-Holland, 1991, Amsterdam).

[3] S. Adachi, Ann. Phys., (NY) **195**, 45(1989).

[4] K. Takahashi and K.S. Ikeda, submitted to Physica D.

[5] A. Shudo and K.S. Ikeda, Phys. Rev. Lett., **74**(1995)682; *ibid* **76**(1996)4151; Physica D**115**(1998)234.

[6] E.J. Heller, E.B. Stechel and M.J. Davis, J. Chem. Phys. **73**(1980)4720; S.C. Creagh, in *Tunneling in Complex Systems*, S. Tomsovic ed. (World Scientific, Singapore) (1998)35.

[7] G.G. Stokes, Trans. Camb. Phil. Soc., **10**(1864)106; *ibid*, **11**(1871)412; J. Heading, "*An Introduction to Phase-Integral Methods*, (Methuen, London, 1962)"; R.B. Dingle, "*Asymptotic expansions: their derivation and interpretation*"(Academic Press, London, 1973); 高野 恭一 『常微分方程式』(新数学講座 6, 朝倉書店, 1994).

[8] J. Milnor, "*Dynamics in one complex variable: Introductory Lectures*", SUNY at Stony Brook ♯ 1990/5(1990); 宍倉光広, "Riemann 球面上の複素力学系について" 数学 41 巻 (1993)34.

[9] S. Friedland and J. Milnor, Ergod. Theor. Dyn. Sys. **9**(1989)67.

[10] J.H. Hubbard, in *Chaotic Dynamics and Fractals* (M. Barnsley and S. Demko, ed.) (1986)101 (Adademic Press, New York).

[11] E. Bedford and J. Smillie(一部 M. Lyubich と共著), "*Polynomial Diffeomorphisms of* $\boldsymbol{C}^2$ I-VII", `http://www.math.sunysb.edu/dynamics/preprints/preprints.html`; J.H. Hubberd and R.W. Oberste-Vorth, Publ. Math. IHES, **79**, (1994)5; 上田哲夫, 谷口雅彦, 諸澤俊介 『複素力学系序説』(倍風館、1995 年); 石井 豊, " $\boldsymbol{C}^2$の複素力学系に関する Bedford-Smillie の最近の結果について", 数理解析研講究録 **1042**(1998)193; 西村保一郎, "$\boldsymbol{C}^2$の多項式自己同型の作る力学系　ポテンシャル論的方法" in *Lecture note Topics in Complex Analysis*, 谷口雅彦編集 (1993)23.

[12] E. Bedford, Lyubich and J. Smillie, Invent. Math. **112**(1993)77.

[13] B. Sternin and V. Shatalov, "*Borel-Laplace Transform and Asymptotic Theory*" (CRC Press, 1996); E. Delabaere and F. Pham, "*Resurgent Method in Semi-Classical Asymptotics*, preprint.

[14] T. Aoki, T. Kawai and Y. Takei, in ICM-90 Satellite Conference Proceedings, *Special Functions*, (1991)1 (Springer); 青木貴史, 河合隆裕, 竹井義次　数学　45 巻 (1993)299.

[15] H.L. Berk, W.M. Nevins and K.V. Roberts, J. Math. Phys., **23**(1982)988.

[16] T. Aoki, T. Kawai and Y. Takei, in *Méthodes résurgentes, Analyse algébrique des perturbations singuliéres*, L. Boutet de Monvel ed. (1994)69.

[17] D. Kaminski, Methods Appl. Analysis **1**(1994)44.

[18] B.V. Berry and C.J. Howls, Proc. R. Soc. Lond. A, **434**(1991)657; C.J. Howls, Proc. R. Soc. Lond. A, **453**(1997)2271.

[19] A. Shudo and K.S. Ikeda, in preparation.

[20] R. Balian and C. Bloch, Ann. of Phys. **85**(1974)514; A. Voros, Ann. Inst. H. Poincare, A **39**(1983)211.